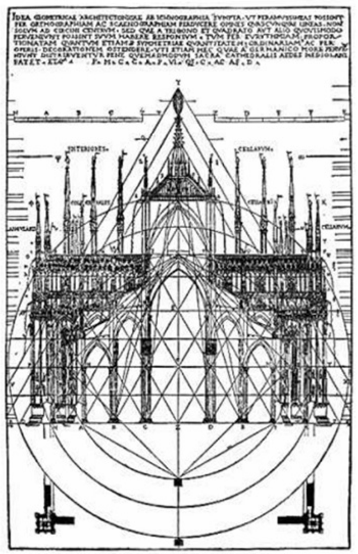
UNITELMA SAPIENZA

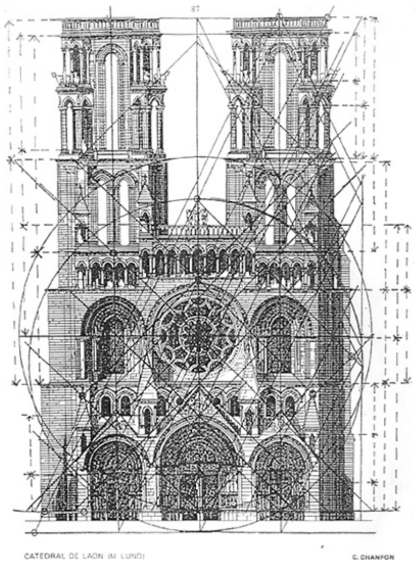
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Geometria elementare

Geometria elementare

La geometria (dal greco “misura della terra") è una scienza molto antica, che si impara fin dalle scuole primarie. Per rendersi conto di quanto questa disciplina sia radicata nella vita e nelle esperienze umane basta ricordare che, nell'antico Egitto per far fronte all'esigenza ridefinire i confini dei campi in seguito agli straripamenti del fiume Nilo, si usavano metodi geometrici. In epoca medioevale, i progetti costruttivi delle grandi cattedrali gotiche sono elaborati utilizzando figure geometriche elementari.





Geometria elementare

Anche oggi le forme geometriche sono fonte di ispirazione per il design architettonico o per l'arte.

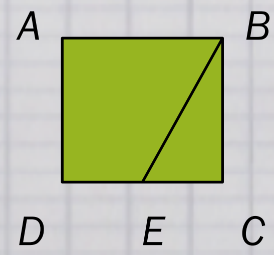
Un po' di familiarità con le forme geometriche più semplici e la capacità di calcolare aree o volumi di forme geometriche è quindi indispensabile non solo per i matematici, ma anche per coloro che sono interessati a discipline come la fisica, l'architettura, l'arte o l'economia. Come vedremo, per affrontare problemi geometrici, è anche necessaria una certa familiarità con strumenti algebrici.

Geometria elementare

Ognuno può verificare le proprie conoscenze di geometria elementare, provando a risolvere i seguenti

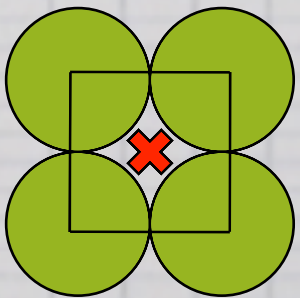
tre esercizi

1. *ABCD è un quadrato. Il segmento EB misura 4 cm mentre il segmento DE misura 2 cm.*

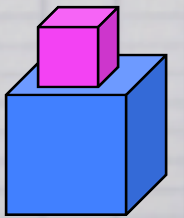


Quanto vale l'area del quadrato?

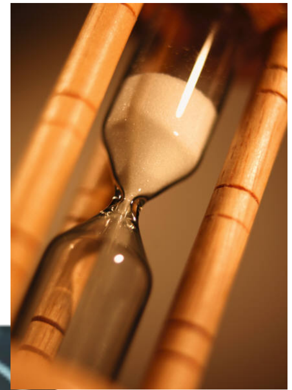
2. *Le basi di 4 colonne uguali di diametro 1 metro sono tangenti a due a due. Ricordando che l'area di un cerchio si calcola come il quadrato del raggio per π, quanto misura l'area della parte di piano all'interno delle colonne ? (Approssimare il valore di π con 3.14).*



3. *Una costruzione è formata da due cubi sovrapposti che hanno lo stesso asse verticale: il cubo superiore ha lato b, quello inferiore ha lato a (a>b). Se vogliamo pitturare la costruzione, la vernice deve bastare per pitturare quanti metri quadrati? (Quanto misura la superficie laterale della costruzione ?)*



Metti in pausa  per 10 minuti (al massimo)



e prova a rispondere, in modo dettagliato …

Quando hai finito, anche se pensi di aver risposto correttamente a tutte le domande, può essere molto utile riflettere attentamente su tutte le risposte e provare a risolvere gli esercizi aggiuntivi indicati dal simbolo ➡

GUIDA ALLA RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

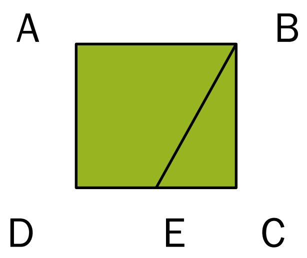
Soluzione esercizio 1. **Un quadrato di lato L ha area uguale a L^2 .**

Poniamo che la lunghezza dei lati del quadrato ABCD sia L : $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = L$.

Se applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ECB vale la relazione

$$|EB|^2=|EC|^2 + |BC|^2$$

(|EB|, |EC|, |BC| sono le lunghezze dei lati del triangolo).



Si ha $|EB| = 4$. Se $|CD| = L$ e $|DE| = 2$ segue che $|EC| = L - 2$. Infine si ha $|BC| = L$.

Dunque $|EB|^2 = 16$, $|EC|^2 = (L - 2)^2$ e $|BC|^2 = L^2$ $\longrightarrow$ $16 = (L - 2)^2 + L^2$ (#)

Calcoliamo il quadrato del binomio $(L - 2)^2$.

$$(L - 2)^2 = (L - 2)(L - 2) = L^2 - 2(2L) + 2^2 = L^2 - 4L + 4,$$

e sostituiamo in (#). Si ha $16 = (L - 2)^2 + L^2 = L^2 - 4L + 4 + L^2 = 2L^2 - 4L + 4$

Dunque per trovare L bisogna risolvere l'**equazione di secondo grado** $L^2 - 4L + 4 + L^2 = 16$, cioè

$$2L^2 - 4L - 12 = 0.$$

Le soluzioni dell'equazione sono $L_1 = 1 - 7^{1/2}$, $L_2 = 1 + 7^{1/2}$ (per sapere come si risolvono le equazioni di secondo grado vedere oltre).

Ma $L_1<0$ (infatti $7^{1/2}>1$), quindi l'unica possibilità è che sia $L = L_2=1 + 7^{1/2}$.

In conseguenza l'area del quadrato vale $(1+ 7^{1/2})^2$.

Possiamo chiederci: quanto vale l'area del triangolo ECB? Che percentuale dell'area del quadrato è occupata da quella del triangolo?

Ricordando che **l'area *A* di un triangolo** si calcola come la metà del prodotto della base per l'altezza e visto che $|EC| = 1 + 7^{1/2} - 2= 7^{1/2} - 1$, in questo caso si ha

$$A = (|EC||CB|)/2 = [(1 + 7^{1/2})(7^{1/2} - 1)]/2= (7 - 1)/2 = 3.$$

(Abbiamo usato il "prodotto notevole" $(a+b)(a-b)=a^2 - b^2$).

Per rispondere alla seconda domanda dobbiamo trovare il valore x/100 tale che

$$(1 + 7^{1/2})^2 = 3 + 3(x/100) = 3(1 + x/100)$$

Approssimando $7^{1/2}$ con 2,65 si ottiene $x/100 \approx 3,44$: l'area del quadrato ABCD è circa il 444% dell'area del triangolo BEC.

Commento. Per confrontare tra loro figure geometriche piane, abbiamo confrontato le loro aree. Perché non abbiamo confrontato i perimetri?

Per rispondere può essere utile ricordare che l'area di una figura piana è un numero che quantifica **l'*estensione* della figura**, cioè l'ampiezza della parte di piano occupata dalla figura. Invece il perimetro è la misura della ***lunghezza del contorno*** **della figura.**

Geometria elementare

Se si deve stabilire se *una figura piana è più grande di un'altra*, non è utile calcolare il perimetro della figura, ma è meglio valutarne l'area. Esistono infatti figure piane, i cosiddetti "**frattali**", il cui perimetro è enormemente grande mentre l'area è finita.

In particolare, se volessimo confrontare il cosiddetto "fiocco di neve" con un cerchio, scopriremmo che mentre il perimetro del fiocco di neve è enormemente più grande di quello del cerchio, e quindi inconfrontabile, le aree risultano confrontabili perché sono entrambe finite.

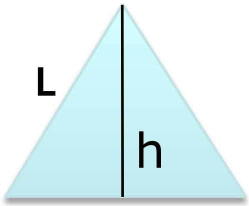
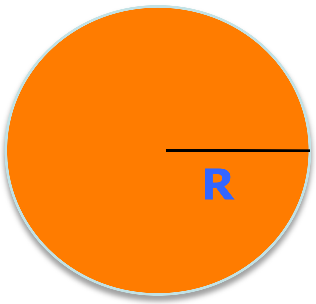
Per approfondire: *"www.treccani.it/enciclopedia/frattali_(Enciclopedia-della-Scienza-e-della-Tecnica)/*

Geometria elementare

Per comodità di chi legge ricordiamo come si calcolano i perimetri e le aree e delle principali figure piane

			Perimetro	**Area**
Quadrato		L	$P = 4L$	$A = L^2$
Rettangolo	L' 	L	$P=2(L + L')$	$A = L \times L'$

Geometria elementare

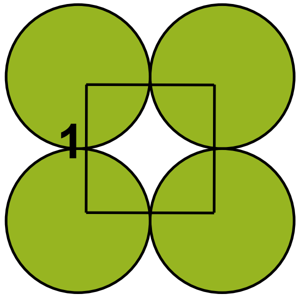
		Perimetro	Area
Triangolo (equilatero)		P = 3L	A= Lh/2 (h=√3(L/2))
Cerchio		P = 2πR	A = πR²

Soluzione esercizio 2. L'area da calcolare si ottiene come la differenza tra area del quadrato ABCD e quella dei 4 spicchi di cerchio interni al quadrato.

Ogni spicchio è la quarta parte dell'area del cerchio.

Visto che il raggio di ogni cerchio misura mezzo metro, l'area del cerchio vale $(1/2)^2\pi = \pi/4$.

Lo spicchio ha area $(1/4)(\pi/4) = \pi/16$. Quattro spicchi hanno area $\pi/4$.

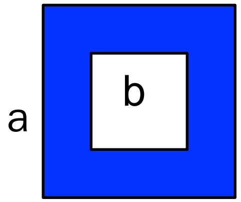


Il quadrato ha lato uguale al diametro di una colonna, cioè 1 metro, quindi l'area del quadrato misura 1 m^2. In definitiva l'area richiesta misura $A = 1 - \pi/4\ m^2$.

(Se approssimiamo π con 3.14 si ha $A \approx 0.215\ m^2$).

Soluzione esercizio 3. La superficie laterale del cubo più piccolo misura $5b^2$ (5 facce laterali, ciascuna di area b^2).

La superficie laterale del cubo più grande è formata da 4 quadrati e, superiormente, dalla figura seguente

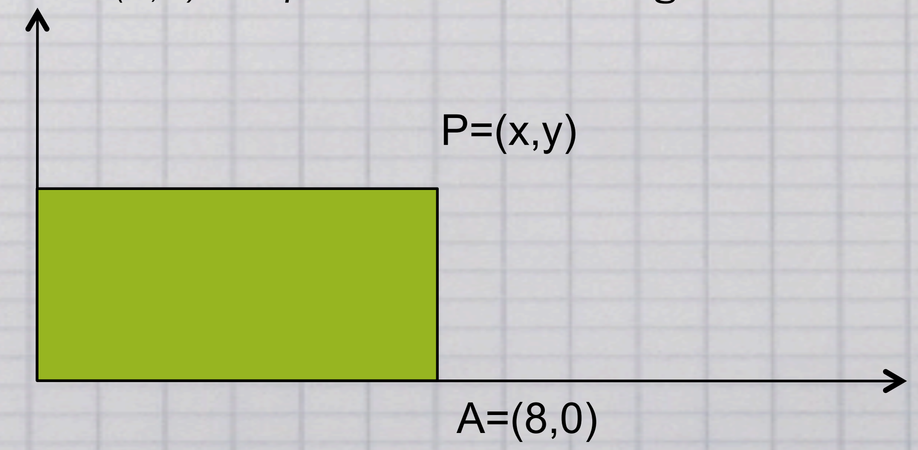


In definitiva la superficie laterale del cubo più grande misura $4a^2 + (a^2 - b^2) = 5a^2 - b^2$.

La superficie laterale complessiva misura $5b^2 + 5a^2 - b^2 = 5a^2 - 4b^2$.

Per esercitarsi un po', ancora qualche esempio …

1. *Quali sono le coordinate del punto P sapendo che le coordinate di A sono (8,0) e il perimetro del rettangolo R vale 28 unità?*



UNITELMA SAPIENZA — SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

2. *Se ogni lato del rettangolo precedente viene allungato del 26%, di quanto aumenta l'area ?*

3. *Se si conosce la misura A dell'area di un rettangolo e la lunghezza P del perimetro e se $P^2 = 12A$, si possono trovare le lunghezze b e h della base e dell'altezza del rettangolo?*
(Motivare la risposta)

Risposte.

1. Se i lati del rettangolo sono lunghi L e l, il perimetro del rettangolo vale $P=2(L+l)$.

In questo caso deve quindi essere $28 = 2(L+l)$, cioe' $14 = L+l$.

La lunghezza L si ricava, per definizione, dall'ascissa di A e vale $L = 8$.

Usando la relazione precedente si ottiene $l = 14 - L = 14 - 8 = 6$.

Visto che l è, per definizione l'ordinata di P, e che L è l'ascissa di P si ha $P=(8,6)$.

2. Se L' e l' sono i lati del rettangolo dopo l'allungamento, si ha

$$L' = L + 0{,}26\,L = (1{,}26)8 = 10{,}08 \qquad \text{e} \qquad l' = (1{,}26)l = (1{,}26)6 = 7{,}56$$

Dopo l'allungamento l'area misura quindi $A' = (10{,}08)(7{,}56) = 76{,}2048$.

Visto che prima dell'allungamento l'area valeva 48, si ha

$$76{,}2048 = 48(1 + x/100) \text{ da cui si ricava}$$

$$x/100 \approx 0{,}59 \text{ con approssimazione per eccesso.}$$

In definitiva l'area aumenta di circa il 59%.

3. Come abbiamo visto dalle formule, se b e h sono la base e l'altezza di un rettangolo e A e P sono rispettivamente l'area e il perimetro, valgono le due relazioni seguenti

$A = bh$ e $P = 2(b + h) \longrightarrow P/2 = b + h$

Si hanno due relazioni nelle due incognite b e h (A e P sono noti).

Se ricaviamo b dalla seconda relazione otteniamo $b = P/2 - h$, che sostituita nella prima relazione dà $A = (P/2 - h)h = -h^2 + (P/2)h$, che si può riscrivere come l'equazione di secondo grado

$$h^2 - (P/2)h + A = h^2 - (P/2)h + P^2/12 = 0 \qquad (*)$$

Ricaviamo h dalla (*). Ricordando che deve essere $P^2 = 12A$ si ha

$$h = (1/2)\ \{ (P/2) \pm [(P/2)^2 - 4P^2/12]^{1/2} \} = (1/2)\ \{ (P/2) \pm [- P^2/12]^{1/2} \}$$

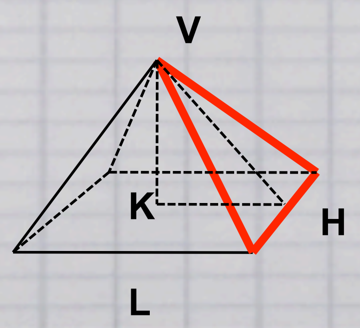
Il valore di h *non* è un numero reale, quindi **non esiste un rettangolo che soddisfi le richieste.**

(Se si conosce la misura A dell'area di un rettangolo e la lunghezza P del perimetro e se $P^2 = 16A$, si possono trovare le lunghezze b e h della base e dell'altezza del rettangolo? Se la risposta è positiva, quanto valgono h e b?)

Ancora qualche esercizio ...

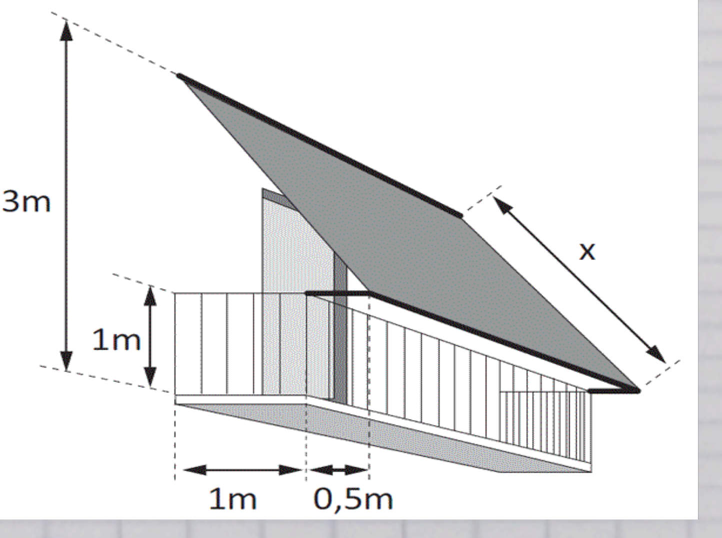
1. *Su una carta geografica in scala 1: 50 000 (ad 1 cm della carta corrispondono 50 000 cm reali), individuate una zona pianeggiante rettangolare su cui costruire una casa. Se sulla carta la zona ha area 6 cm^2, che estensione ha in realtà la zona ?*

2. *Una piramide ha la base quadrata di lato L. Se l'altezza della piramide misura L/2, quanto misura l'area della faccia colorata in rosso ?*



3. Volete confezionare una tenda da balcone che abbia le caratteristiche in figura. Quanti metri di stoffa vi servono ? (Quanto vale x ?)

Se il balcone è lungo 4m., e se la stoffa costa 24 euro al metro quadro, quanto spendete?



Risposte.

1. ***Bisogna confrontare aree:*** sulla carta un centimetro quadrato corrisponde a $(50 \times 10^3)^2 = 25(10^8)\ cm^2$. Quindi se x rappresenta l'estensione da valutare si ha $1 : 25(10^8) = 6 : x$, da cui si ha $x = 150(10^8) cm^2$. Questa misura si può scrivere nella forma $x = 1{,}5\ km^2$.

2. Si ha $|VK| = |KH| = L/2$. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo VKH si ha

$$|VH|^2 = |VK|^2 + |KH|^2 \longrightarrow |VH|^2 = L^2/2 \longrightarrow |VH| = [(2)^{1/2}L]/2.$$

$|VH|$ è la lunghezza dell'altezza del triangolo rosso. L'area del triangolo vale

$$A = (L^2\,(2)^{1/2})/2.$$

3. Si ha $x^2 = 2^2 + (1{,}5)^2 = 6{,}25$, quindi $x = 2{,}5m$.

Se la lunghezza vale L = 4m, l'area del rettangolo vale $A = 4 \times 2{,}5 = 10\ m^2$.

Per comprare la stoffa occorrono quindi 240 euro.

Un po' di cultura: la geometria euclidea e quella non euclidea. Come abbiamo brevemente ricordato all'inizio della lezione, la geometria nasce per risolvere problemi concreti ma, sin dal VII secolo a.C., si allontana progressivamente dal concreto per diventare una disciplina che studia i legami astratti e generali tra le figure.

Uno dei più famosi e importanti geometri dell'antichità è **Euclide**, **c**he in un'opera in 13 libri, *Gli Elementi (300 a.C.)*, raccoglie le conoscenze geometriche del tempo e le espone in modo sistematico, creando un vero e proprio "metodo" per ottenere risultati rigorosi.

Il metodo euclideo, per secoli, è stato considerato un modello per rappresentare la realtà, influenzando non solo l'arte e l'architettura, ma anche tutte le altre scienze e il modo di vedere e pensare il mondo che ci circonda.

In cosa consiste il "metodo euclideo"?

Nei suoi libri di Euclide dà, per prima cosa, **le definizioni** riguardanti gli oggetti che vuole trattare. Vengono poi enunciate delle proposizioni che non richiedono dimostrazione: si tratta sia di affermazioni basate sul buonsenso (come "*se due cose sono uguali ad una terza, esse sono uguali tra loro*"), sia di **assiomi o postulati** che si devono ritenere veri (come "*un segmento di linea può essere disegnato unendo due punti a caso*").
Ogni altra affermazione viene da Euclide chiamata **teorema** e deve essere dedotta da affermazioni di buonsenso e da assiomi attraverso processi di ragionamento, detti **dimostrazioni.**

Ricordiamo che uno dei postulati più famosi enunciati da Euclide è il V che, in una formulazione equivalente del 1795, afferma che "*per un punto non appartenente ad una retta r passa una ed una sola parallela ad r".*

Geometria elementare

UNITELMA SAPIENZA SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

Il V postulato, al contrario degli altri quattro, non è di immediata evidenza, tuttavia non è possibile rinunciarvi perché da esso seguono molti risultati di geometria euclidea (ad esempio il teorema di Pitagora o la teoria della similitudine di figure piane).

Per moltissimo tempo sono stati fatti, senza successo, tentativi di eliminare il V postulato senza pregiudicare la costruzione teorica euclidea. La questione viene superata a tra la fine del IXX e l'inizio del XX secolo con la proposta di geometrie, cosiddette "**non euclidee**", basate sui soli primi quattro postulati.

Geometria elementare

Tra i protagonisti di questa rivoluzione si devono ricordare Nicolaj Lobacevskij (1792-1856) Karl Friedrich Gauss (1777-1855), Bernhard Riemann (1826-1866), Felix Klein (1849-1925) e David Hilbert (1862-1946).




Le geometrie non euclidee hanno molto contribuito al grandissimo sviluppo della fisica moderna, in particolare alla relatività einsteiniana.

(**Per saperne di più** su questi argomenti si può consultare, tra gli altri, il sito www.treccani.it/.../l-ottocento-matematica-la-*geometria-non-euclidea_(Storia- della-Scienza)/*)